Aristotelische diagrammen: eeuwenoud, springlevend

Een stand van zaken in de logische meetkunde

Lorenz Demey

<Te verschijnen in: *Lessen voor de eenentwintigste eeuw 2021. Weten wat telt in tijden van crisis*. Pieter d'Hoine & Bart Pattyn, reds. Leuven: Universitaire Pers Leuven. 2021>

Van Aristotelische diagrammen naar logische meetkunde

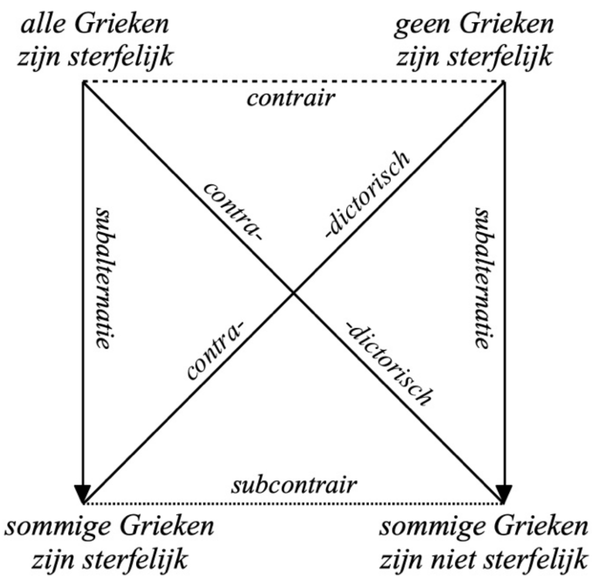
In tegenstelling tot het coronavirus, de Brexit of de *black lives matter*-beweging, zullen Aristotelische diagrammen en logische meetkunde wellicht niet meteen een belletje doen rinkelen bij de meeste lezers van deze bijdrage. Laten we daarom eerst en vooral eens bekijken wat Aristotelische diagrammen en logische meetkunde precies zijn en waarvoor ze zoal gebruikt kunnen worden. Stel dat we werken binnen één of ander afgesloten systeem van zinnen. Deze zinnen kunnen uitspraken zijn uit een natuurlijke taal zoals het Nederlands of het Engels, maar evengoed wiskundige formules uit een formele taal zoals de algebra of de programmeertaal Python. Binnen zo'n systeem kunnen we een aantal interessante relaties tussen zinnen definiëren: we noemen twee zinnen

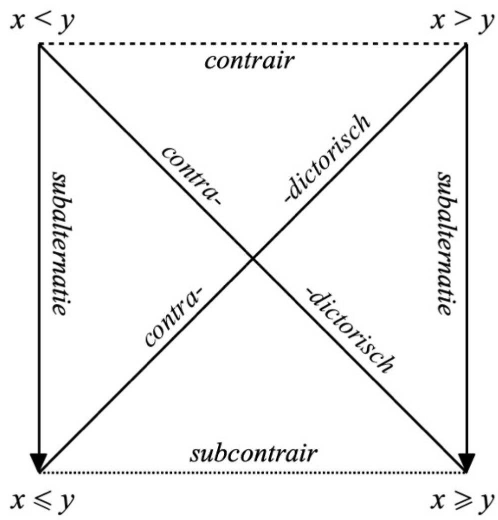
contradictorisch	als en slechts als	ze niet samen waar kunnen zijn en ze niet samen onwaar kunnen zijn,
contrair	als en slechts als	ze niet samen waar kunnen zijn maar ze wel samen onwaar kunnen zijn,
subcontrair	als en slechts als	ze niet samen onwaar kunnen zijn maar ze wel samen waar kunnen zijn,
in subalternatie	als en slechts als	de eerste zin de tweede impliceert maar niet omgekeerd.

Deze relaties worden vaak de *Aristotelische relaties* genoemd, omdat zij teruggevoerd kunnen worden tot de logische werken van de Griekse filosoof Aristoteles (384 – 322 v. Chr.).

Aristoteles zelf sprak overigens uitsluitend over de relaties van contradictie en contrariteit; de andere twee relaties, subcontrariteit en subalternatie, werden pas later aan het lijstje toegevoegd. Een *Aristotelisch diagram*, tot slot, is een visuele voorstelling van een dergelijk systeem van zinnen en de verschillende Aristotelische relaties waarin die zinnen zich tot elkaar verhouden.

Het oudste en meest bekende Aristotelische diagram is ongetwijfeld het zogenaamde 'oppositievierkant' (*square of opposition*) voor de categorische uitspraken. Een eenvoudige versie van dit vierkant wordt weergegeven in Figuur 1. We zeggen bijvoorbeeld dat de uitspraak *alle Grieken zijn sterfelijk* contradictorisch is aan *sommige Grieken zijn niet sterfelijk*, omdat deze twee uitspraken niet samen waar kunnen zijn, en al evenmin samen onwaar. Diezelfde uitspraak, *alle Grieken zijn sterfelijk*, is dan weer contrair aan *geen Grieken zijn sterfelijk*, omdat deze twee uitspraken wederom niet samen waar kunnen zijn, maar wél samen onwaar – bijvoorbeeld in een denkbeeldige situatie waarin een aantal Grieken sterfelijk zijn en een aantal andere Grieken onsterfelijk. In Figuur 2 zien we een totaal verschillend systeem van zinnen, die evenwel aanleiding geven tot exact dezelfde Aristotelische relaties en dus tot hetzelfde type van oppositievierkant. Hier gaat het om uitspraken over de ordening van de reële getallen, en zeggen we bijvoorbeeld dat $x < y$ en $x > y$ contrair zijn aan elkaar, omdat er geen enkel paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestaat waarvoor beide uitspraken waar zijn, terwijl er wél paren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestaan waarvoor beide uitspraken onwaar zijn (namelijk paren waarbij $x = y$).





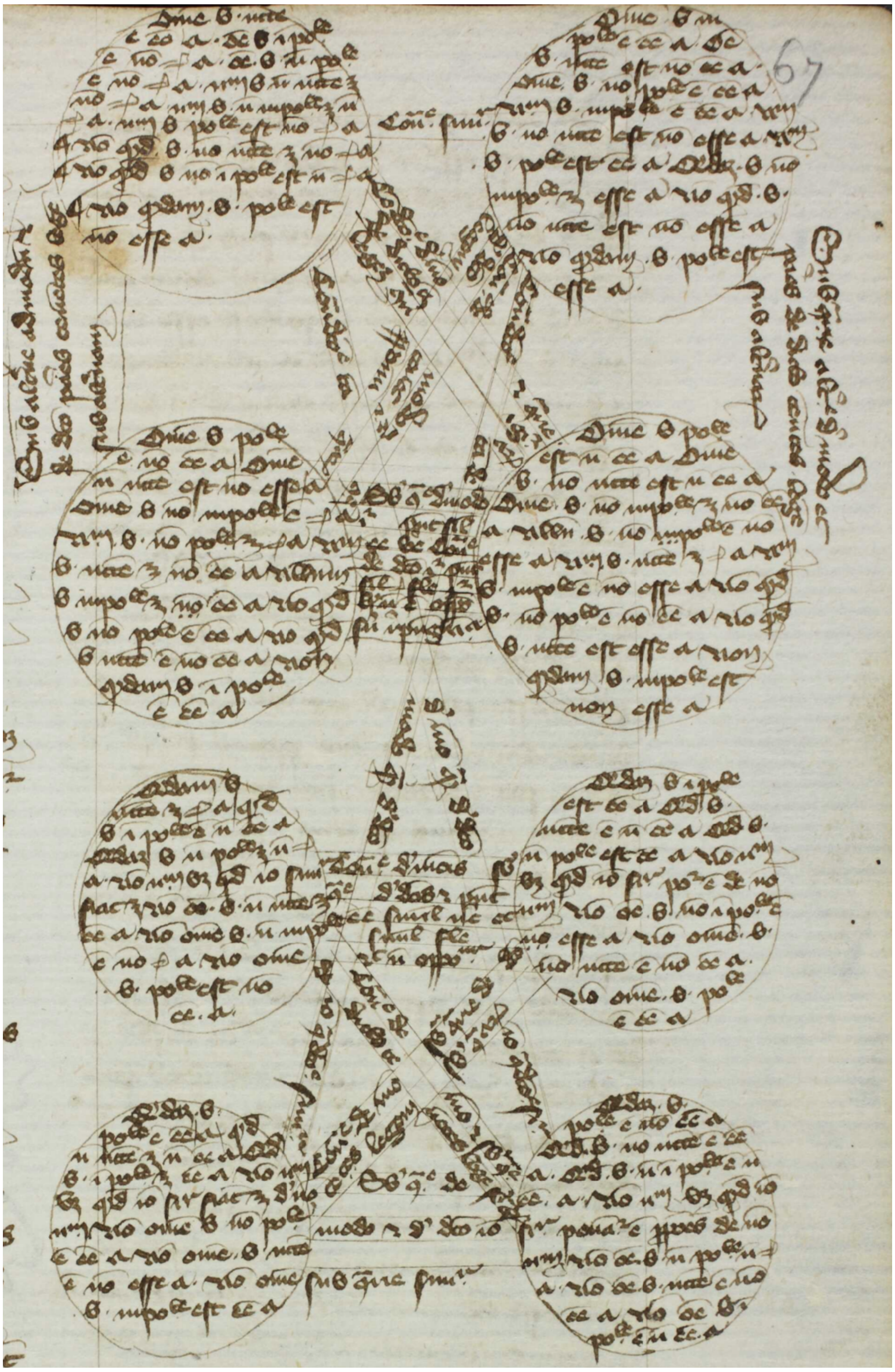
Figuur 1 Figuur 2

Bijschrift figuur 1: Oppositievierkant voor de categorische uitspraken

Bijschrift figuur 2: Oppositievierkant voor de ordening van de reële getallen

Aristotelische diagrammen hebben een rijkgevulde geschiedenis binnen de filosofie. We zagen al dat de Aristotelische relaties teruggaan op Aristoteles, maar voor zover bekend heeft hij evenwel geen diagrammen daadwerkelijk getekend. De eerste diagrammen treffen we aan bij filosofen zoals Apuleius (ca. 125 – 175), Ammonius Hermiae (ca. 440 – 520) en Boëthius (ca. 480 – 525). Ook Martianus Capella (ca. 360 – 428) nam een Aristotelisch diagram op in zijn werk *De nuptiis Philologiae et Mercurii*, wat gezien kan worden als de eerste poging uit de Westerse geschiedenis om een encyclopedie van alle beschikbare kennis op te stellen. Deze auteurs maakten gebruik van Aristotelische diagrammen als hulpmiddeltjes om ervoor te zorgen dat hun lezers de onderliggende theorie (zoals bijvoorbeeld het subtiele onderscheid tussen contradictie en contrariteit) beter zouden begrijpen en onthouden. Al deze vroege Aristotelische diagrammen zijn eenvoudige oppositievierkanten voor de categorische uitspraken, zoals in Figuur 1.

Vanaf de 12^e^ à 13^e^ eeuw begonnen een aantal auteurs, wiens namen helaas niet meer bekend zijn, ook oppositievierkanten te construeren voor modale uitspraken zoals *het is noodzakelijk dat God bestaat* en *het is onmogelijk dat God bestaat.* Door het oppositievierkant voor de modale uitspraken te vergelijken met het eerdere vierkant voor de categorische uitspraken, konden zij een aantal fundamentele analogieën en dwarsverbanden tussen deze twee systemen in de verf zetten; zo is de contrariteit tussen *alle* en *geen* bij de categorische uitspraken bijvoorbeeld perfect analoog aan de contrariteit tussen *noodzakelijk* en *onmogelijk* bij de modale uitspraken. Een natuurlijke volgende stap bestond erin om categorische en modale uitspraken met elkaar te combineren, waardoor we uitkomen bij uitspraken zoals *alle Grieken zijn noodzakelijk sterfelijk* en *sommige Grieken zijn mogelijk niet sterfelijk*. Hoewel er rond de 13^e^ eeuw reeds een goed begrip was van de categorische en de modale uitspraken afzonderlijk, brachten dergelijke combinaties van beide een aantal nieuwe vragen met zich mee die lange tijd onbeantwoord moesten blijven. Het zou duren tot de Frans-Vlaamse filosoof Johannes Buridanus (ca. 1300 – 1358) klaarheid bracht over deze kwestie. Buridanus onderscheidde in totaal 8 verschillende modaal-categorische uitspraken, die paarsgewijs in 28 Aristotelische relaties staan tot elkaar. Om dit kluwen van uitspraken en relaties overzichtelijk voor te stellen, maakte Buridanus gebruik van een oppositieachthoek, die een veralgemening was van de eerdere oppositievierkanten. (Buridanus zelf sprak van zijn 'grote figuur', oftewel *magna figura*.) Figuur 3 toont hoe deze achthoek getekend werd in een laat-14^e^-eeuws manuscript. Als laatste voorbeeld noemen we Gottlob Frege (1848 – 1925), één van de grondleggers van de hedendaagse wiskundige logica. Ondanks het revolutionaire karakter van zijn inzichten, vond Frege het toch de moeite om te beklemtonen dat ook zijn logische systeem aanleiding gaf tot een oppositievierkant, en in die zin wel degelijk aansloot bij een eeuwenoude traditie van logica-onderzoek.



Figuur 3

Bijschrift: Buridanus' *magna figura* voor de modaal-categorische uitspraken (Leipzig MS 1372, f. 67r.)

Aristotelische diagrammen worden ook vandaag de dag nog veelvuldig gebruikt. In de 20e en 21e eeuw treffen we deze diagrammen aan in een aantal kerngebieden van de filosofie, zoals de epistemologie en de taalfilosofie, maar eveneens in minder voor de hand liggende deelgebieden, zoals de ethiek en de godsdienstfilosofie. Epistemologen zoals Ernest Sosa en Herbert Heidelberger houden zich bezig met de analyse van kennis: wat betekent het bijvoorbeeld om te zeggen dat een student niet louter correct gegokt heeft, maar echt wéét wat het juiste antwoord op de examenvraag is? Zij bestuderen hoe kennis zich verhoudt tot allerlei aanverwante noties, zoals overtuiging, rechtvaardiging, waarheid, zekerheid en waarschijnlijkheid, en construeren diverse Aristotelische diagrammen om hun inzichten overzichtelijk samen te vatten. Godsdienstfilosofen zoals Elijah Hess en Kirk MacGregor denken onder andere na over het probleem van toekomstige contingenties: als God alwetend is en dus ook de toekomst kent, betekent dit dan niet dat de toekomst nu reeds vastligt? Hess en MacGregor beantwoorden deze vraag op twee radicaal verschillende manieren, maar beiden maken gebruik van Aristotelische diagrammen om hun argumentatie uit te leggen en kracht bij te zetten. (Later in deze bijdrage zullen we nog even terugkeren naar dit godsdienstfilosofische debat.)

In de laatste decennia vinden Aristotelische diagrammen ook meer en meer toepassingen buiten de filosofie, in disciplines zoals de psychologie, de taalkunde, de rechtswetenschap en de computerwetenschap. Psychologen zoals Stephen Newstead, Richard Griggs en Camillo Porcaro gebruiken bijvoorbeeld Aristotelische diagrammen in hun onderzoek naar de psychologische en neurologische processen die plaatsvinden wanneer (neurotypische en andere) mensen aan het redeneren zijn – bijvoorbeeld wanneer zij proberen te achterhalen of twee zinnen al dan niet contradictorisch zijn aan elkaar. Ook taalkundigen, zoals Laurence Horn en Johan van der Auwera maken veelvuldig gebruik van Aristotelische diagrammen, bijvoorbeeld bij het bestuderen van lexicalisatiepatronen in natuurlijke taal. Wanneer we bijvoorbeeld het oppositievierkant uit Figuur 1 bekijken, dan zien we dat de hoekpunten linksboven, linksonder en rechtsboven uitgedrukt worden met één enkel woord in het Nederlands, namelijk *alle*, *sommige* en *geen*. Het hoekpunt rechtsonder, daarentegen, komt niet overeen met één enkel woord, maar kan enkel beschreven worden door meerdere woorden te combineren, namelijk *sommige … niet*. Dit patroon doet zich niet enkel voor in het Nederlands, maar in vrijwel alle talen ter wereld, en is bijgevolg bijzonder interessant voor de studie van menselijke taal op zich. Rechtswetenschappers zoals Joachim Hruschka, Jan Joerden en Erich

Vranes gebruiken dan weer Aristotelische diagrammen om te bestuderen wat het precies betekent om te zeggen dat twee wetsartikelen in 'conflict' zijn met elkaar, in termen van hun wederzijdse contradictie-, contrariteits- en subcontrariteitsrelaties. Computerwetenschappers zoals Didier Dubois, Henri Prade en Yiyu Yao, tot slot, construeren complexe Aristotelische diagrammen voor de formalismen die zij ontwikkelen om kennis voor te stellen binnen de artificiële intelligentie, zoals bijvoorbeeld *formal concept analysis* en *rough set theory*. Door deze diagrammen met elkaar te vergelijken, kunnen zij onverwachte dwarsverbanden tussen de achterliggende formalismen op het spoor komen, en hen zelfs proberen te integreren binnen één overkoepelend systeem.

Aristotelische diagrammen zijn dus eeuwenoud maar ook springlevend. Zij worden gebruikt binnen een brede en interdisciplinaire onderzoeksgemeenschap die zich bezighoudt met alle aspecten van logisch redeneren. Door deze steeds groter en diverser wordende reeks toepassingen, zijn er de laatste decennia ook een aantal methodologische problemen en misvattingen ontstaan. Zo kan het bijvoorbeeld gebeuren dat een psycholoog een bepaald Aristotelisch diagram ontwikkelt en begint te bestuderen, zonder te beseffen dat gelijkaardige diagrammen reeds in de middeleeuwen intensief bestudeerd werden. Of een rechtswetenschapper en een computerwetenschapper komen ertoe, elk vanuit hun eigen specifieke disciplinaire achtergrond, om éénzelfde (type van) Aristotelisch diagram te gebruiken en te bestuderen, zonder evenwel op de hoogte te zijn van elkaars resultaten of de potentiële relevantie ervan te (h)erkennen. Dergelijke situaties leiden ertoe dat belangrijke inzichten telkens opnieuw herontdekt moeten worden, wat de wetenschappelijke vooruitgang onnodig afremt. Daarom is men de laatste jaren Aristotelische diagrammen op een meer systematische manier gaan bestuderen, wat aanleiding heeft gegeven tot een nieuw onderzoeksprogramma, namelijk de *logische meetkunde*.

Dit impliceert een fundamentele perspectiefwissel: in de logische meetkunde beschouwen we Aristotelische diagrammen niet langer als louter een hulpmiddel om iets anders mee te illustreren of te verduidelijken, maar verheffen we ze juist tot ons eigenlijke studieobject. Doordat we niet langer focussen op de specifieke details van deze of gene toepassing, is het de afgelopen jaren steeds duidelijker geworden dat Aristotelische diagrammen een rijke wiskundige structuur vertonen. Deze structuur situeert zich zowel op *algebraïsch-logisch* als op *visueel-meetkundig* vlak – vandaar ook de term 'logische meetkunde'. Deze theoretische inzichten zijn op zich reeds waardevol en elegant, maar zij hebben ook een bredere impact.

Eens we de onderliggende wiskundige structuur van Aristotelische diagrammen beter begrijpen, kunnen we deze inzichten immers ook inzetten om de bestaande toepassingen van deze diagrammen te verbeteren en zelfs om volledig nieuwe toepassingen voor te stellen. Elke onderzoeker die Aristotelische diagrammen gebruikt of bestudeert binnen zijn/haar specifieke onderzoeksgebied, doet er wellicht dus goed aan om eens een kijkje te nemen naar de logische meetkunde.

In de rest van deze bijdrage schetsen we enkele van de belangrijkste realisaties binnen de logische meetkunde. Eerst en vooral bekijken we een aantal centrale theoretische resultaten, waarbij we eerst ingaan op de algebraïsch-logische structuur van Aristotelische diagrammen en daarna op hun visueel-meetkundige eigenschappen. Vervolgens gaan we in op de nieuwe en verbeterde toepassingen van Aristotelische diagrammen die mogelijk gemaakt worden door de logische meetkunde. Eerst staan we stil bij een aantal toepassingen afkomstig uit de geschiedenis van de filosofie, en daarna bekijken we een aantal hedendaagse toepassingen, bijvoorbeeld in de godsdienstfilosofie en in de artificiële intelligentie. We besluiten deze bijdrage met een korte reflectie op de huidige stand van zaken in de logische meetkunde en een aantal perspectieven op toekomstige ontwikkelingen.

De logische eigenschappen van Aristotelische diagrammen

In deze sectie bespreken we drie belangrijke thema's in verband met de algebraïsch-logische structuur van Aristotelische diagrammen, namelijk (i) de precieze karakterisering van de Aristotelische relaties in termen van Booleaanse algebra's, (ii) de classificatie van Aristotelische diagrammen in verschillende families en subfamilies, en (iii) de ontwikkeling van bitstringsemantiek. Omwille van de behandelde onderwerpen bevat deze sectie onvermijdelijk een aantal wiskundige details, maar de centrale ideeën kunnen ook perfect gevolgd worden door lezers zonder wiskundige achtergrond.

Het eerste thema betreft een precieze karakterisering van de Aristotelische relaties van contradictie, (sub)contrariteit en subalternatie. Zoals we eerder al stelden, kan de informele definitie van de Aristotelische relaties teruggevoerd worden tot de logische werken van Aristoteles, maar zij is ook vandaag nog steeds de meest frequent gehanteerde definitie. Zij heeft echter een aantal serieuze nadelen, die voortvloeien uit haar erg informele karakter. Beschouw bijvoorbeeld de voorwaarde dat twee zinnen 'samen waar kunnen zijn' in de definitie van subcontrariteit. Eerst en vooral kunnen we hierbij de fundamentele filosofische vraag stellen: wat *is* waarheid eigenlijk? Verder impliceert deze informele definitie ook een drastische inperking van het toepassingsbereik van Aristotelische diagrammen. Waarheidswaarden (waar of onwaar) komen immers toe aan zinnen, maar níet aan individuele woorden (of vele andere soorten entiteiten, zoals verzamelingen of relaties). Het zou bijvoorbeeld een categoriefout zijn om te stellen dat het woord *zwart* waar is, of dat het woord *wit* onwaar is. Toch maken hedendaagse taalkundigen gebruik van Aristotelische diagrammen in de lexicale semantiek, waarbij zij stellen dat de individuele woorden *zwart* en *wit* contrair zijn aan elkaar. Tot slot heeft de informele definitie ook een *modaal* aspect: zo wordt er in de definitie van subcontrariteit niet geëist dat de twee zinnen de facto samen waar zijn, maar louter dat zij samen waar kúnnen zijn. Dit modale aspect heeft doorheen de geschiedenis al vaak aanleiding gegeven tot misverstanden over Aristotelische diagrammen. Zo stelde de Italiaanse humanist Lorenzo Valla (ca. 1406 – 1457) bijvoorbeeld dat twee ware zinnen nooit echt subcontrair aan elkaar kunnen zijn, terwijl dit volgens de definitie van subcontrariteit wel degelijk mogelijk is.

Deze informele definitie kan op verschillende manieren gepreciseerd en veralgemeend worden. Zo is er een modeltheoretische definitie, waarbij bijvoorbeeld de voorwaarde dat de zinnen φ en ψ niet samen waar kunnen zijn (in een logisch systeem S) geformaliseerd wordt als $\vDash_S \neg(\varphi \wedge \psi)$, met andere woorden als de voorwaarde dat er geen enkel S-model M bestaat zodanig dat $M \vDash \varphi$ en $M \vDash \psi$. De informele notie van waarheid wordt dus precies gemaakt aan de hand van de $\vDash$-relatie tussen S-modellen en zinnen, terwijl het modale aspect tot uiting komt in de expliciete kwantificatie over S-modellen ('er bestaat geen enkel…'). Deze modeltheoretische definitie is echter nog steeds beperkt tot zinnen (meer bepaald: zinnen uit de objecttaal van S). Een verdere veralgemening doet daarom een beroep op zogenaamde Booleaanse algebra's. In zo'n algebra $\mathbb{B}$ kunnen we bijvoorbeeld stellen dat elementen x en y contrair zijn aan elkaar als en slechts als er geldt dat $x \wedge_{\mathbb{B}} y = \bot_{\mathbb{B}}$ en $x \vee_{\mathbb{B}} y \neq \top_{\mathbb{B}}$. De elementen x en y van zo'n Booleaanse algebra kunnen zinnen of formules zijn, maar evenzeer individuele woorden, verzamelingen, relaties, enzovoort. De algebraïsche definitie van contrariteit is van toepassing op al deze verschillende types van entiteiten; zo is het bijvoorbeeld nu wel degelijk mogelijk om te stellen dat de individuele woorden *zwart* en *wit* contrair zijn aan elkaar, zonder daarbij een categoriefout te maken. Als we werken met de Booleaanse algebra $\mathbb{B}(S)$ die overeenkomt met het logische systeem S (de zogenaamde Lindenbaum-Tarski algebra van S), dan blijkt bovendien dat de eerdere, modeltheoretische definitie gezien kan worden als een speciaal geval van de algebraïsche definitie. Door nog complexere Booleaanse algebra's te beschouwen, bijvoorbeeld $\wp(\mathbb{B}(S) \times \mathbb{B}(S))$, wordt het tot slot ook mogelijk om Aristotelische diagrammen naar een metalogisch niveau te tillen, waardoor we bijvoorbeeld wiskundig precies kunnen uitleggen wat de 13e-eeuwse filosoof Petrus Hispanus bedoelde met zijn stelling dat de relaties van contrariteit en subcontrariteit zélf contrair zijn aan elkaar. Twee zinnen kunnen namelijk niet tegelijk contrair en subcontrair zijn aan elkaar, maar zij kunnen wél noch contrair noch subcontrair zijn aan elkaar (bijvoorbeeld als zij in een relatie van subalternatie staan).

Een tweede thema in verband met de logische structuur van Aristotelische diagrammen betreft de classificatie van deze diagrammen in verschillende families en subfamilies. Het vaakst voorkomende type van Aristotelisch diagrammen is het oppositievierkant (cf. Figuren 1 en 2), maar daarnaast komen er ook heel wat andere types van Aristotelische diagrammen voor in de literatuur, zoals zeshoeken, achthoeken en zelfs driedimensionale diagrammen zoals rhombische dodecaëders. Denk bijvoorbeeld terug aan de oppositieachthoek die Johannes Buridanus in de 14e eeuw construeerde om de Aristotelische relaties tussen de modaal-categorische uitspraken voor te stellen (cf. Figuur 3). Om enigszins het overzicht te behouden over deze wildgroei aan diagrammen, is het belangrijk om een systematische *typologie* van Aristotelische diagrammen op te stellen.

We vertrekken van de simplifiërende aanname dat Aristotelische diagrammen gesloten zijn onder negatie: als een diagram een element φ bevat, dan bevat het ook $\neg\varphi$. Deze aanname is gebaseerd op een aantal theoretische consideraties, maar haar belangrijkste motivatie is de empirische vaststelling dat de overgrote meerderheid van alle diagrammen uit de literatuur (waaronder de diagrammen in Figuren 1, 2 en 3) effectief aan deze aanname voldoet. Verder definiëren we een notie van *Aristotelisch isomorfisme*: dit is een bijectieve functie $f: D \to D'$ die alle Aristotelische relaties in het diagram D afbeeldt op dezelfde relaties in het diagram D', en omgekeerd (bijvoorbeeld: φ en ψ zijn contrair in D als en slechts als $f(\varphi)$ en $f(\psi)$ contrair zijn in D'). De oppositievierkanten in Figuren 1 en 2 zijn bijvoorbeeld Aristotelisch isomorf aan elkaar: de functie die de zin linksboven in het eerste vierkant (*alle Grieken zijn sterfelijk*) afstuurt op de zin linksboven in het tweede vierkant ($x < y$), en analoog voor de drie andere hoekpunten, is een Aristotelisch isomorfisme van het eerste naar het tweede vierkant. Een *Aristotelische familie* kan vervolgens gedefinieerd worden als een collectie van isomorfe diagrammen: twee diagrammen behoren tot dezelfde Aristotelische familie als en slechts als zij Aristotelisch isomorf zijn aan elkaar.

Met behulp van deze bouwstenen kunnen we een volwaardige typologie van Aristotelische diagrammen opstellen. Zo kunnen we bijvoorbeeld aantonen dat er precies 2 Aristotelische families van vierkanten bestaan, precies 5 families van zeshoeken, precies 18 families van achthoeken, enzovoort. Met behulp van deze typologie kunnen alle Aristotelische diagrammen geclassificeerd worden. De twee vierkanten uit Figuren 1 en 2 zijn isomorf aan elkaar, en behoren dus tot dezelfde Aristotelische familie, namelijk één van de 2 families van vierkanten; deze familie wordt soms de familie van de 'klassieke oppositievierkanten' (*classical squares of opposition*) genoemd, omdat zij de oudste en vaakst voorkomende familie is. Verder behoort de achthoek uit Figuur 3 tot één van de 18 families van achthoeken; deze familie wordt soms de familie van 'Buridanus-achthoeken' (*Buridan octagons*) genoemd, naar de eerste auteur die ooit een diagram uit deze familie bestudeerd heeft.

Deze typologie kan op verschillende manieren verder uitgewerkt en verfijnd worden. Zo kunnen we de notie van Aristotelisch isomorfisme veralgemenen tot die van *Aristotelisch homomorfisme*: dit is een functie $f: D \to D'$ die alle Aristotelische relaties in het diagram D afbeeldt op dezelfde relaties in het diagram D', maar niet noodzakelijk omgekeerd (bijvoorbeeld: als φ en ψ contrair zijn in D, dan zijn $f(\varphi)$ en $f(\psi)$ contrair in D', maar niet noodzakelijk omgekeerd). Als er twee homomorfismen $f: D \to D'$ en $g: D' \to D$ bestaan die elkaars inversen zijn (dat wil zeggen, $g \circ f = id_D$ en $f \circ g = id_{D'}$), dan zijn D en D' isomorf aan elkaar. Dit toont aan dat we te maken hebben met 'robuuste' noties van homo- en isomorfisme, wat het vertrekpunt vormt voor een verdere studie van Aristotelische diagrammen in termen van categorietheorie. Een andere verfijning focust op de Booleaanse structuur van Aristotelische diagrammen. Een Booleaans isomorfisme is (ruwweg) een bijectieve functie $f: D \to D'$ die de Booleaanse operatoren van conjunctie en negatie bewaart – dat wil zeggen, $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$ en $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$. Er kan aangetoond worden dat elk Booleaans isomorfisme meteen ook een Aristotelisch isomorfisme is, maar niet omgekeerd. In meer typologische bewoordingen betekent dit dat elke Aristotelische familie verder opgedeeld kan worden in een aantal Booleaanse subfamilies. Zo kunnen we binnen de Aristotelische familie van Buridanus-achthoeken precies drie verschillende Booleaanse subfamilies onderscheiden. Diagrammen die tot verschillende Booleaanse subfamilies van éénzelfde Aristotelische familie behoren, vertonen dezelfde Aristotelische structuur (zij zijn immers Aristotelisch isomorf aan elkaar), maar een verschillende Booleaanse structuur (zij zijn immers niet Booleaans isomorf aan elkaar).

Een derde algebraïsch-logisch onderwerp uit het theoretische luik van de logische meetkunde betreft de zogenaamde *bitstringsemantiek*. Dit is een bijzonder krachtige techniek om Aristotelische diagrammen op een compacte manier te representeren, waardoor zij erg efficiënt bestudeerd kunnen worden. Ons startpunt is de observatie dat elk Aristotelisch diagram D een partitie $\Pi(D)$ van de logische ruimte induceert. Concreet hebben we $\Pi(D) = \{\pm\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \pm\varphi_n \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in D\} \setminus \{\bot\}$. Deze verzameling wordt een 'partitie' genoemd, omdat haar elementen gezamenlijk exhaustief zijn en elkaar paarsgewijs uitsluiten – dat wil zeggen, $\vDash \bigvee \Pi(D)$ en $\vDash \neg(\alpha \wedge \alpha')$ voor alle $\alpha \neq \alpha' \in \Pi(D)$. Men kan nu aantonen dat elke zin φ uit het diagram D geschreven kan worden als een disjunctie van formules uit de partitie $\Pi(D)$, namelijk $\varphi \equiv \bigvee\{\alpha \in \Pi(D) \mid \alpha \vDash \varphi\}$. De bitstringrepresentatie $\beta(\varphi)$ van de formule φ houdt bij welke formules uit $\Pi(D)$ er precies in deze disjunctie voorkomen; bijvoorbeeld als $\Pi(D) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ en $\varphi \equiv \alpha_1 \vee \alpha_3 \vee \alpha_5$, dan schrijven we $\beta(\varphi) = 10101$. Formeel gezien is de bitstringrepresentatie een functie $\beta\colon D \to \{0,1\}^{|\Pi(D)|}$, die aan elke formule $\varphi \in D$ een rijtje van $|\Pi(D)|$ nullen en enen toekent (we schrijven $|\Pi(D)|$ om het aantal elementen in $\Pi(D)$ aan te duiden). Men kan aantonen dat deze functie (ruwweg) een Booleaans isomorfisme is, en dus a fortiori eveneens een Aristotelisch isomorfisme. Hierdoor krijgen we op een heel concrete manier grip op zowel de Booleaanse als de Aristotelische structuur van het diagram D.

Beschouw bijvoorbeeld het modale oppositievierkant, dat bestaat uit de zinnen *het is noodzakelijk dat God bestaat*, *het is onmogelijk dat God bestaat* en hun respectievelijke negaties. Dit modale vierkant induceert een partitie met drie elementen: {*het is noodzakelijk dat God bestaat*, *het is noch noodzakelijk noch onmogelijk dat God bestaat*, *het is onmogelijk dat God bestaat*}, en bijgevolg verkrijgen we bijvoorbeeld de bitstringrepresentaties $\beta($*het is noodzakelijk dat God bestaat*$) = 100$ en $\beta($*het is onmogelijk dat God bestaat*$) = 001$. Het feit dat noodzakelijkheid en onmogelijkheid contrair zijn aan elkaar, kan nu eenvoudigweg 'afgelezen' worden uit hun bitstringrepresentaties: er is geen enkele positie waarin de bitstrings 100 en 001 allebei een 1 hebben staan (cf. de informele voorwaarde dat de formules niet samen waar kunnen zijn), maar er is wél een positie (namelijk de middelste) waarin deze bitstrings allebei een 0 hebben staan (cf. de informele voorwaarde dat de formules wél samen onwaar kunnen zijn).

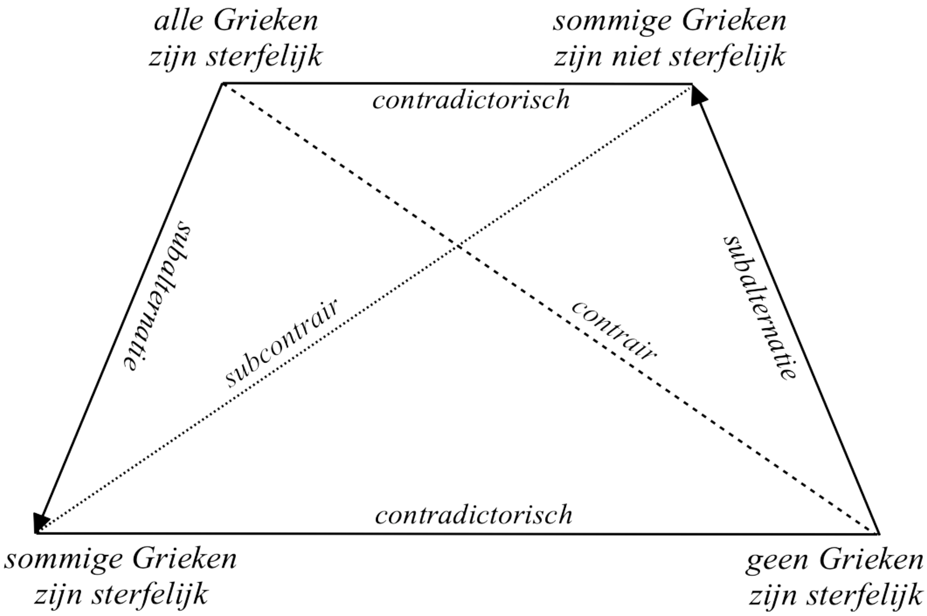
Dankzij hun erg concrete karakter ('rijtjes van nullen en enen') hebben bitstrings een grote heuristische waarde. Zo is het bestaan van verschillende Booleaanse subfamilies binnen éénzelfde Aristotelische familie (als algemeen fenomeen, veeleer dan als zeldzaam curiosum) pas echt duidelijk geworden door te werken met bitstringsemantiek. Verder kunnen bitstringlengtes gebruikt worden om Booleaanse subfamilies uniek te karakteriseren. We hebben eerder bijvoorbeeld al gezien dat de Aristotelische familie van Buridanus-achthoeken precies drie Booleaanse subfamilies heeft. Welnu, deze drie verschillende subfamilies corresponderen precies met drie verschillende bitstringlengtes. De eerste Booleaanse subfamilie bestaat uit Buridanus-achthoeken D die gerepresenteerd kunnen worden met bitstrings van lengte 4 (want $|\Pi(D)| = 4$); de tweede Booleaanse subfamilie bestaat uit Buridanus-achthoeken D die gerepresenteerd kunnen worden met bitstrings van lengte 5 (want $|\Pi(D)| = 5$); en de derde Booleaanse subfamilie bestaat uit Buridanus-achthoeken D die gerepresenteerd kunnen worden met bitstrings van lengte 6 (want $|\Pi(D)| = 6$). Als laatste voorbeeld van de heuristische waarde van bitstringsemantiek bekijken we een aantal combinatorische resultaten. Het is eenvoudig om aan te tonen dat een bitstring van lengte n die op k posities een 1 heeft staan, contrair is aan precies $2^{n-k} - 1$ andere bitstrings van lengte n. Neem bijvoorbeeld $n = 4$ en $k = 2$: de bitstring 1100 is contrair aan $2^{4-2} - 1 = 3$ andere bitstrings van lengte 4, namelijk 0010, 0001 en 0000. Dergelijke berekeningen kunnen opgeschaald worden van individuele Aristotelische relaties naar volledige Aristotelische diagrammen. Denk bijvoorbeeld terug aan het eerder genoemde feit dat er precies twee Aristotelische families van vierkanten bestaan: enerzijds de reeds genoemde 'klassieke oppositievierkanten' (*classical squares of opposition*) en anderzijds de 'ontaarde oppositievierkanten' (*degenerate squares of opposition*). Welnu, men kan aantonen dat er met bitstrings van lengte n precies $\frac{1}{2}(3^n - 3 \cdot 2^n + 3)$ klassieke oppositievierkanten en precies $\frac{1}{8}(2^{2n} + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n - 4)$ ontaarde oppositievierkanten geconstrueerd kunnen worden. Het verschil in de leidende exponent tussen deze twee aantallen (3^n versus 2^{2n}) illustreert dat het totale aantal ontaarde oppositievierkanten (exponentieel) veel groter is dan het totale aantal klassieke oppositievierkanten. Deze wiskundige observatie staat in schril contrast met de empirische vaststelling dat we in de literatuur veel meer klassieke dan ontaarde oppositievierkanten aantreffen!

De heuristische kracht van bitstringsemantiek is de laatste jaren dermate groot gebleken, dat we ondertussen ook op zoek zijn gegaan naar toepassingen buiten de logische meetkunde. Dit heeft aanleiding gegeven tot het interdisciplinaire onderzoeksproject BITSHARE (*Bitstring Semantics for Human and Artificial Reasoning*), waarin filosofen, logici, psychologen, taalkundigen en computerwetenschappers samenwerken om bitstringsemantiek toe te passen op onderwerpen zoals de psychologie van spatiaal redeneren en de expressiviteit van DMN (*Decision Model and Notation*) uit de bedrijfsinformatica.

De visuele eigenschappen van Aristotelische diagrammen

In deze sectie bespreken we twee belangrijke thema's in verband met de visueel-meetkundige structuur van Aristotelische diagrammen, namelijk (i) het onderscheid tussen informationele en computationele equivalentie van diagrammen, en (ii) de studie van Aristotelische diagrammen als meetkundige entiteiten in de Euclidische ruimte.

Ons eerste thema betreft het onderscheid tussen informationele en computationele equivalentie van Aristotelische diagrammen. Als twee diagrammen niet Aristotelisch isomorf zijn aan elkaar (met andere woorden, niet tot dezelfde Aristotelische familie behoren), dan bieden zij fundamenteel verschillende informatie: ze bevatten verschillende zinnen, die eventueel afkomstig zijn uit verschillende logische systemen, en die in verschillende configuraties van Aristotelische relaties staan tot elkaar. Van dergelijke diagrammen zeggen we dat ze niet *informationeel equivalent* zijn aan elkaar. Het klassieke oppositievierkant uit Figuur 1 en de Buridanus-achthoek uit Figuur 3 zijn bijvoorbeeld duidelijk niet informationeel equivalent: de achthoek bevat veel meer zinnen en vooral veel meer Aristotelische relaties dan het vierkant. In de literatuur treffen we echter ook heel wat diagrammen aan die precies dezelfde informatie bevatten (dezelfde zinnen, afkomstig uit hetzelfde logische systeem, die in dezelfde configuratie van Aristotelische relaties staan tot elkaar), maar die toch sterk verschillen in hun visuele kenmerken. Van dergelijke diagrammen zeggen we dat ze informationeel equivalent zijn, maar dat ze niet *computationeel equivalent* zijn aan elkaar. Dit laatste betekent dat de visuele verschillen tussen dergelijke diagrammen ertoe kunnen leiden dat een gebruiker makkelijker kan werken met het ene diagram dan met het andere. De notie van 'werken met een diagram' kan cognitief geoperationaliseerd worden als inferenties maken, memoriseren, enzovoort met behulp van dat diagram. Als twee diagrammen wel informationeel maar niet computationeel equivalent zijn aan elkaar, dan is er geen enkel logisch verschil tussen deze diagrammen (ze bevatten exact dezelfde informatie), maar wél een cognitief verschil: het ene diagram is ‘nuttiger’ of ‘handiger’ om mee te werken dan het andere. Beschouw bijvoorbeeld het Aristotelische diagram in Figuur 4: dit diagram is informationeel equivalent aan het klassieke oppositievierkant in Figuur 1, maar beide diagrammen zijn duidelijk niet computationeel equivalent aan elkaar. Op een louter intuïtief niveau ziet het diagram in Figuur 4 er immers veel ‘chaotischer’ uit dan dat in Figuur 1, waardoor het veel moeilijker is voor de gebruiker om de geboden informatie te verwerken en er concreet mee aan de slag te gaan. (Deze intuïtieve beoordeling zal later nog concreter en preciezer gemaakt worden.)



Figuur 4

Bijschrift: Een alternatief diagram voor de categorische uitspraken

Om systematisch te kunnen differentiëren tussen informationeel equivalente diagrammen, maken we gebruik van een aantal fundamentele principes uit de uitgebreide literatuur over diagrammatisch redeneren. Twee belangrijke en complementaire principes zijn *Apprehension* en *Congruence*. Het Apprehension-principe heeft enkel betrekking op het diagram zelf (onafhankelijk van de gevisualiseerde informatie), en stelt ruwweg dat de cognitieve waarde van een diagram stijgt naarmate het visueel eenvoudiger is. Figuur 1 maakt bijvoorbeeld enkel gebruik van rechte hoeken, terwijl Figuur 4 een nodeloos onderscheid introduceert tussen scherpe en stompe hoeken. Volgens het Apprehension-principe scoort Figuur 1 dus beter op cognitief vlak dan Figuur 4. Het Congruence-principe heeft betrekking op het diagram in relatie tot de gevisualiseerde informatie, en stelt ruwweg dat de cognitieve waarde van een diagram stijgt naarmate de (visuele) structuur van het diagram beter overeenkomt met de (abstract-logische) structuur van de gevisualiseerde informatie. Figuur 1 maakt bijvoorbeeld gebruik van twee lijnen die exact even lang zijn om de twee contradictierelaties voor te stellen, terwijl Figuur 4 deze relaties voorstelt met behulp van één korte en één lange lijn. Dit visuele onderscheid tussen korte en lange lijnen komt echter niet overeen met een onderliggend logisch onderscheid: we kunnen niet zeggen dat twee zinnen meer of minder contradictorisch zijn aan elkaar dan twee andere zinnen. Ook volgens het Congruence-principe scoort Figuur 1 dus beter op cognitief vlak dan Figuur 4.

Het tweede thema binnen het visueel-meetkundige perspectief op Aristotelische diagrammen houdt in dat we deze diagrammen effectief bestuderen als *meetkundige entiteiten* binnen een (twee-, drie- of hogerdimensionale) Euclidische ruimte. Concreet gaan we hiermee van start door coördinaten toe te kennen aan de verschillende punten in zo'n diagram. Beschouw bijvoorbeeld het klassieke oppositievierkant uit Figuur 1. We kunnen hier een orthogonaal assenstelsel op leggen, met als oorsprong het middelpunt van het diagram, waar de twee diagonalen elkaar snijden. Dit definieert een coördinaatsfunctie $c_D: D \to \mathbb{R}^2$, die aan elke zin φ in het diagram een coördinatenpaar $c_D(\varphi) \in \mathbb{R}^2$ toekent. Zo hebben we bijvoorbeeld $c_D($*alle Grieken zijn sterfelijk*$) = (-1,1)$, $c_D($*geen Grieken zijn sterfelijk*$) = (1,1)$ en $c_D($*sommige Grieken zijn sterfelijk*$) = (-1,-1)$. Dit proces kan probleemloos opgeschaald worden van individuele zinnen (hoekpunten van het diagram) naar relaties tussen zinnen (zijdes van het diagram). Zo ligt de contrariteitsrelatie tussen *alle Grieken zijn sterfelijk* en *geen Grieken zijn sterfelijk* op de rechte $y = 1$; de subalternatie van *alle Grieken zijn sterfelijk* naar *sommige Grieken zijn sterfelijk* ligt op de rechte $x = -1$; en de contradictie tussen *sommige Grieken zijn sterfelijk* en *geen Grieken zijn sterfelijk* ligt op de rechte $y = x$. Merk op dat de logische relatie van contradictie overeenkomt met de meetkundige eigenschap van puntsymmetrie om de oorsprong: als φ en ψ contradictorisch zijn aan elkaar, dan geldt er dat $c_D(\varphi) = -c_D(\psi)$. Deze correlatie tussen contradictie en puntsymmetrie doet zich voor in een grote meerderheid van alle Aristotelische diagrammen die we aantreffen in de literatuur.

Dit meetkundige perspectief bewijst vooral zijn nut bij het bestuderen van grotere, meer complexe Aristotelische diagrammen. Beschouw bijvoorbeeld de Booleaanse algebra $\mathbb{B}_4$, die uit 16 elementen bestaat die we kunnen representeren als bitstrings van lengte 4. Strikt wiskundig gezien is het meest voor de hand liggende ‘diagram’ voor $\mathbb{B}_4$ een vierdimensionale hyperkubus. Dergelijke vierdimensionele entiteiten gaan het menselijke voorstellingsvermogen echter te boven, en dus moeten we op zoek naar alternatieve, lagerdimensionale diagrammen om $\mathbb{B}_4$ te visualiseren. In de literatuur treffen we heel wat (driedimensionale) voorstellen aan, zoals de rhombische dodecaëder en de geneste tetraheder. Hoewel deze driedimensionale Aristotelische diagrammen op het eerste zicht fundamenteel van elkaar verschillen, kan er aangetoond worden dat zij wel degelijk nauw met elkaar samenhangen, aangezien zij allebei gezien kunnen worden als verschillende soorten projecties van die ene vierdimensionale hyperkubus. Dit kan misschien verder verduidelijkt worden aan de hand van een eenvoudige analogie. Een cirkel en een rechthoek zijn, als tweedimensionale figuren beschouwd, fundamenteel verschillend van elkaar. We kunnen hen echter toch met elkaar in verband brengen, door hen te zien als twee verschillende projecties van éénzelfde driediemensionaal object, namelijk een cylinder (denk bijvoorbeeld aan het vooraanzicht en het bovenaanzicht van een wc-rolletje).

Historische toepassingen van Aristotelische diagrammen

In de vorige twee secties hebben we uitgebreid stilgestaan bij de theoretische grondslagen van Aristotelische diagrammen, zowel op logisch als op meetkundig vlak. Deze resultaten hebben een onafhankelijke wiskundige en filosofische waarde, maar zij helpen ons ook om een beter inzicht te krijgen in de concrete toepassingen van deze diagrammen. In deze sectie bespreken we twee (clusters van) toepassingen die afkomstig zijn uit de geschiedenis van de filosofie, namelijk (i) gevalsstudies over Aristotelische diagrammen bij individuele auteurs, en (ii) Aristotelische diagrammen als invalshoek op bredere historische thema’s.

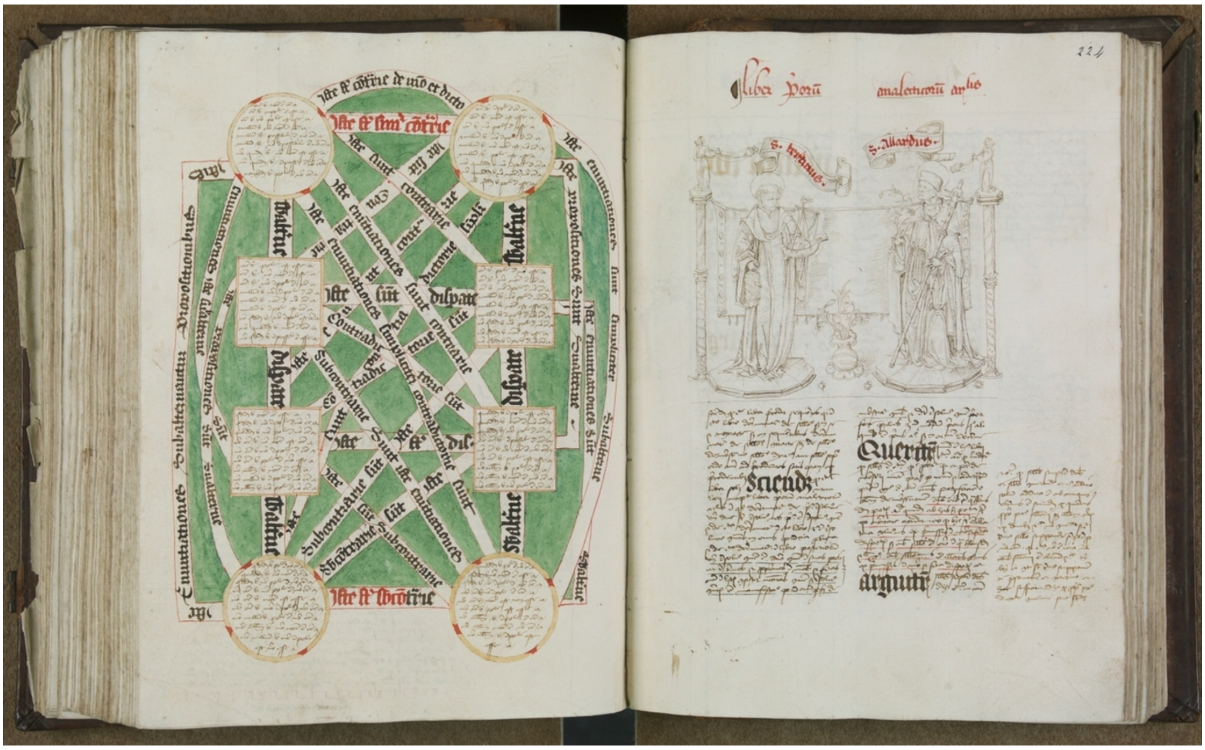
In de historiografie van de filosofie en de logica is er al jaren een bloeiende traditie om specifieke gevalsstudies te maken over de Aristotelische diagrammen die geconstrueerd werden door belangrijke historische auteurs. Door het theoretische begrippenkader dat binnen de logische meetkunde ontwikkeld is, kunnen we deze gevalsstudies naar een niveau van technische sofisticatie tillen dat voorheen eenvoudigweg onbereikbaar was. Zo is er de laatste jaren heel wat onderzoek gedaan naar de oppositieachthoeken van Johannes Buridanus. In de 14^e^ eeuw heeft Buridanus oppositieachthoeken geconstrueerd voor drie verschillende logische systemen, namelijk de modaal-categorische uitspraken, de *obliqua* categorische uitspraken, en de categorische uitspraken met gekwantificeerd predikaat. De modaal-categorische uitspraken kwamen reeds eerder aan bod in deze bijdrage, en Buridanus' achthoek hiervoor werd getoond in Figuur 3. (De precieze details van de twee andere systemen zijn op dit moment niet relevant.) De logische meetkunde biedt ons het begrippenkader om deze drie achthoeken aan een verdere analyse te onderwerpen. Eerst en vooral blijkt dat de drie achthoeken allen Aristotelisch isomorf zijn aan elkaar; met andere woorden, zij behoren tot dezelfde Aristotelische familie (die we de familie van 'Buridanus-achthoeken' noemen, zoals al eerder vermeld). Uit het theoretische luik van de logische meetkunde weten we dat deze Aristotelische familie verder onderverdeeld kan worden in drie Booleaanse subfamilies, namelijk de Buridanus-achthoeken die gerepresenteerd kunnen worden met bitstrings van lengte 4, lengte 5 en lengte 6. Welnu, Buridanus' modale achthoek en zijn *obliqua* achthoek blijken allebei een partitie te induceren die uit 6 elementen bestaat. Dit betekent dat deze twee achthoeken niet alleen Aristotelisch, maar ook Booleaans isomorf zijn: zij behoren tot dezelfde Booleaanse subfamilie van Buridanus-achthoeken. Tot grote verrassing van velen blijkt echter dat Buridanus' achthoek voor de categorische uitspraken met gekwantificeerd predikaat een partitie induceert die uit slechts 5 elementen bestaat. Dit betekent dat Buridanus' derde achthoek wel Aristotelisch, maar níet Booleaans isomorf is aan zijn eerste twee achthoeken. De derde achthoek behoort tot een andere Booleaanse subfamilie dan de eerste twee.

Dit is een belangrijk nieuw inzicht voor de geschiedschrijving van de laatmiddeleeuwse logica in het algemeen, en van het werk van Johannes Buridanus in het bijzonder. Maar daarnaast is dit resultaat ook bijzonder waardevol voor het theoretische luik van de logische meetkunde. Op basis van strikt logische consideraties konden we immers aantonen dat de Aristotelische familie van Buridanus-achthoeken drie Booleaanse subfamilies heeft (overeenkomstig met bitstrings van lengte 4, 5 en 6). Voor de Booleaanse subfamilies die overeenkomen met bitstringlengtes 4 en 6 waren er reeds geruime tijd concrete voorbeelden uit de literatuur gekend. Voor de Booleaanse subfamilie die overeenkomt met bitstringlengte 5 was dit gedurende lange tijd echter níet het geval: het bestaan van deze subfamilie kon op theoretische gronden aangetoond worden, maar we hadden er vooralsnog geen concreet voorbeeld van uit de literatuur. Door aan te tonen dat Johannes Buridanus' achthoek voor de categorische uitspraken met gekwantificeerd predikaat tot deze Booleaanse subfamilie (bitstringlengte 5) behoort, hebben we nu voor elk van de drie Booleaanse subfamilies een concreet voorbeeld afkomstig uit de literatuur. Met enige zin voor overdrijving kan de methodologische rol van onze typologie van Aristotelische diagrammen vergeleken worden met die van Mendeljevs periodiek systeem der elementen uit de scheikunde. Mendeljev stelde immers een classificatie op waarin plaats was voor alle elementen die op dat moment reeds in de natuur waargenomen waren, maar waarin ook een aantal plaatsen leeg gelaten werden. Deze lege plaatsen komen overeen met scheikundige elementen waarvan het bestaan op basis van theoretische gronden voorspeld kon worden, hoewel ze op dat moment nog niet in de natuur waargenomen waren. Later werden deze lege plaatsen ook effectief opgevuld: de voorspelde elementen werden effectief waargenomen in de natuur (bijvoorbeeld gallium, germanium en scandium). Zoals we reeds hebben gezien, kan een zeer gelijkaardig verhaal verteld worden over de typologie van Aristotelische diagrammen.

In recent en lopend onderzoek zijn er gevalsstudies gedaan naar Aristotelische diagrammen bij een aantal zeer uiteenlopende auteurs, zoals de Franse filosoof Nicole Oresme (1320 – 1382), de Spaanse theoloog Domingo Báñez (1528 – 1604), de Duitse filosoof Arthur Schopenhauer (1788 – 1860) en de Engelse wiskundige Augustus De Morgan (1806 – 1871). Laten we even inzoomen op één van deze gevalsstudies, namelijk het Aristotelische diagram dat voorkomt in het kosmologische werk van Nicole Oresme (*Le Livre du Ciel et du Monde*). Oresmes diagram is zeer merkwaardig, omdat het niet voldoet aan een aantal fundamentele aannames: op logisch vlak is het diagram níet gesloten onder negatie, en op meetkundig vlak vertoont het géén correlatie tussen contradictie en puntsymmetrie. Zoals reeds eerder vermeld, maken we in het theoretische luik van logische meetkunde nochtans veelvuldig gebruik van deze aannames. Bij het opstellen van de typologie van Aristotelische diagrammen hadden we bijvoorbeeld de simplifiërende aanname gemaakt dat alle diagrammen gesloten zijn onder negatie. Dit impliceert dat Oresmes diagram niet eenduidig geclassificeerd kan worden binnen de typologie: het ‘zweeft’ als het ware tussen twee verschillende Aristotelische families, zonder daadwerkelijk tot één van deze twee families te behoren. Deze vaststelling toont aan dat de typologie nog verder ontwikkeld en verfijnd dient te worden. Meer algemeen vormen de gevalsstudies over Buridanus en Oresme een mooie illustratie van de vruchtbare wisselwerking tussen wiskundige theorievorming enerzijds en ‘empirische’ aftoetsing aan concrete diagrammen uit de literatuur anderzijds.

Historisch onderzoek naar Aristotelische diagrammen hoeft zich niet altijd toe te spitsen op gevalsstudies naar één specifieke auteur. Aristotelische diagrammen bieden namelijk vaak ook een onverwachte invalshoek op bredere historiografische thema’s, zoals (i) de filosofische oriëntatie van het logica-onderwijs tijdens de beginjaren van de Leuvense universiteit (ca. 1425 – 1525), en (ii) de spanningsverhouding tussen Aristotelische en wiskundige logici tijdens de mathematisering van de logica (ca. 1870 – 1930). We zullen hieronder kort ingaan op deze twee thema's, met bijzondere aandacht voor de rol van Aristotelische diagrammen.

Op basis van historisch bronnenonderzoek naar officiële universiteitsdocumenten hebben heel wat historici beweerd dat het Leuvense logica-onderwijs in de beginjaren van de universiteit sterk 'traditionalistisch' gekleurd was. Zij wijzen bijvoorbeeld op het bestaan van meerdere verordeningen uit de 15^{e} eeuw, waarin het expliciet verboden werd om de nominalistische theorieën van auteurs zoals William Ockham en Johannes Buridanus te onderwijzen. De laatste jaren hebben historici echter niet alleen naar officiële beleidsdocumenten gekeken, maar ook naar de concrete lesvoorbereidingen van professoren en collegenota's van studenten uit die periode. Uit deze 'onofficiële' bronnen, die veel dichter bij de eigenlijke lespraktijk staan, komt een heel ander beeld naar voren: het Leuvense logica-onderwijs uit die periode was helemaal niet zo traditionalistisch als tot nu toe werd vermoed. Door een grondige inhoudelijke analyse van de collegenota's van een Leuvense student uit ca. 1502, heeft de classicus Christophe Geudens aangetoond dat de Leuvense logica duidelijk beïnvloed werd door Johannes Buridanus, tenminste op het deelgebied van de *topicale logica*. De laatste jaren hebben wij verder onderzoek gedaan naar deze collegenota's: zij bevatten namelijk meerdere Aristotelische diagrammen, waaronder één modale oppositieachthoek. Door paleografische en logische expertise met elkaar te combineren, zijn we erin geslaagd om aan te tonen dat deze Leuvense achthoek Aristotelisch isomorf is aan de modale oppositieachthoek van Buridanus zélf. Ter illustratie: Buridanus' modale oppositieachthoek werd reeds getoond in Figuur 3; de Leuvense achthoek uit ca. 1502 wordt getoond in Figuur 5. Deze diagrammatische vaststelling toont aan dat er ook op het deelgebied van de *modale logica* een duidelijke invloedslijn liep van Johannes Buridanus naar de Leuvense logici van die tijd. De eerdere 'traditionalistische' interpretatie van het Leuvense logica-onderwijs wordt hierdoor verder ondermijnd.



Figuur 5

Bijschrift: Leuvense collegenota's (ca. 1502) met een Buridanus-achthoek voor de modaal-categorische uitspraken (Saint-Omer, BA., MS 609, f. 223v – 224r.)

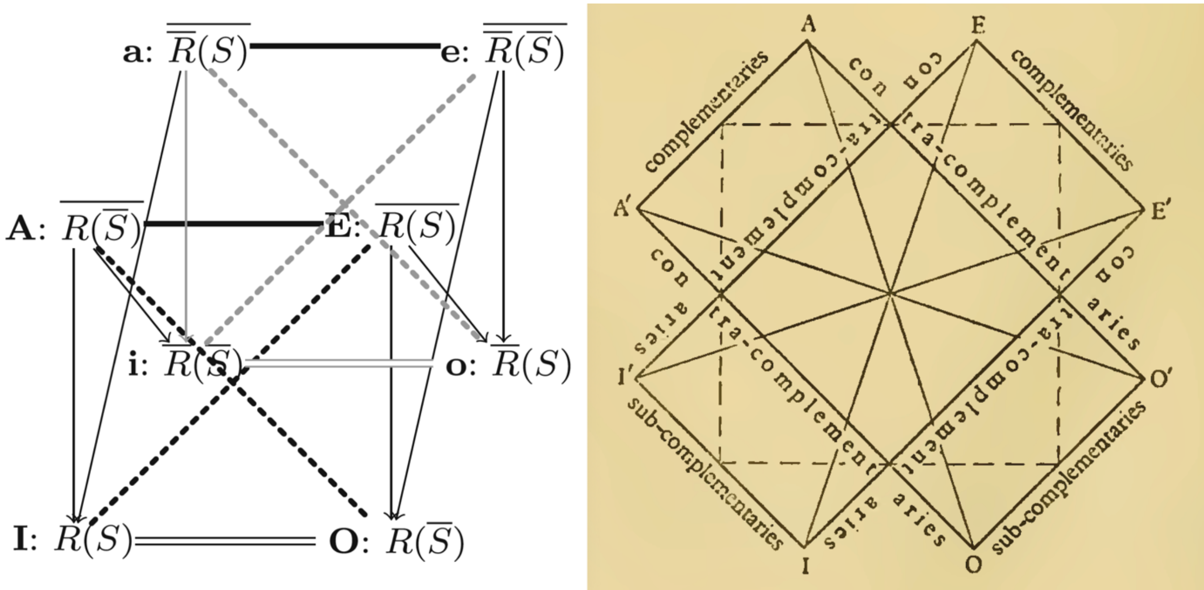
Een ander breed thema betreft de gespannen verhouding tussen Aristotelische en wiskundige logici. Het lijkt erop dat er in de periode ca. 1870 – 1930 plots minder Aristotelische diagrammen werden geproduceerd. Een mogelijke verklaring voor deze tijdelijke 'dip' is dat deze korte periode precies samenvalt met de zogenaamde mathematisering van de logica. Rond de eeuwwisseling tussen de 19e en 20e eeuw heeft de logica namelijk een drastische gedaanteverwisseling ondergaan: door het werk van auteurs zoals George Boole, Gottlob Frege en Bertrand Russell evolueerde zij van een filosofische, Aristotelisch geïnspireerde discipline naar een veel meer wiskundig georiënteerde discipline. Deze mathematisering heeft tot op zekere hoogte tot een schisma in de logica geleid: enerzijds waren er de traditionele logici die vasthielden aan het Aristotelische paradigma, anderzijds waren er de wiskundige logici die enthousiast meegingen in het nieuwe, gemathematiseerde paradigma. In de geschiedschrijving van deze periode wordt er vooral aandacht besteed aan de vijandigheden tussen deze twee kampen. De wiskundige logici ridiculiseerden de traditionele logica (inclusief Aristotelische diagrammen) en probeerden haar in de vergetelheid te dringen, onder andere door haar te vergelijken met het achterhaalde geocentrisme van de Aristotelisch-Ptolemaeïsche astronomie.

De traditionele logici, op hun beurt, verweten de wiskundige logica dat de creativiteit van de menselijke rede nooit perfect in steriele wiskundige formules gevat zou kunnen worden. Deze wederzijdse vijandigheden mogen echter niet overdreven worden: ondanks alle vijandigheden bestaat er ook een grote mate van continuïteit en overeenkomst tussen beide logische paradigma's. Zo hebben heel wat wiskundige logici (waaronder Frege zelf) de traditionele Aristotelische logica, en het oppositievierkant in het bijzonder, bestudeerd aan de hand van wiskundige hulpmiddelen. Omgekeerd hebben heel wat traditionele logici aangetoond hoe het oppositievierkant veralgemeend kan worden buiten de Aristotelische logica, en bijvoorbeeld ook van toepassing is op allerlei wiskundige systemen (zoals de ordening van de reële getallen; cf. Figuur 2).

Hedendaagse toepassingen van Aristotelische diagrammen

In deze sectie gaan we verder met het aanwenden van theoretische inzichten uit de logische meetkunde voor nieuwe toepassingen van Aristotelische diagrammen. In de vorige sectie zijn we ingegaan op een aantal historische toepassingen; in deze sectie zullen een aantal (clusters van) hedendaagse toepassingen aan bod komen, namelijk (i) in de artificiële intelligentie, (ii) in diverse filosofische debatten, en (iii) in het logica-onderwijs.

Sinds een tiental jaren zijn Aristotelische diagrammen aan een opmars bezig binnen de *kennisrepresentatie*, een deeldomein van de artificiële intelligentie. Het gaat hierbij vooral om oppositievierkanten en -zeshoeken, maar in het werk van de reeds eerder genoemde computerwetenschappers Didier Dubois en Henri Prade zien we steeds opnieuw nog een ander diagram opduiken, namelijk een oppositiekubus (*cube of opposition*). Deze kubus speelt een belangrijke rol in hun computerwetenschappelijk werk, en zij hebben dan ook al veel onderzoek verricht naar de wiskundige eigenschappen ervan. Recent is echter gebleken dat de kubus van Dubois en Prade gerelateerd is aan een diagram dat reeds een eeuw geleden besproken werd in het filosofische werk van John Neville Keynes (1852 – 1949) en William E. Johnson (1858 – 1931). In Figuur 6 zien we het diagram van Dubois en Prade zij aan zij met dat van Keynes en Johnson. Er zijn een aantal duidelijke visuele verschillen tussen beide diagrammen: zo werken Dubois en Prade met een driedimensionale kubus, terwijl Keynes en Johnson gebruik maken van een tweedimensionale achthoek (of zelfs: twee overlappende rechthoeken). Logisch gezien zijn deze verschillen echter niet zo relevant, of om het met de terminologie te zeggen die reeds eerder ingevoerd werd: de diagrammen van Dubois/Prade en Keynes/Johnson zijn duidelijk niet computationeel equivalent aan elkaar, maar zij kunnen daarom wél nog informationeel equivalent zijn aan elkaar. Er is ondertussen namelijk aangetoond dat er een Aristotelisch (en zelfs een Booleaans) isomorfisme bestaat tussen de kubus van Dubois en Prade en de achthoek van Keynes en Johnson. Dit resultaat is al bijzonder vruchtbaar gebleken, omdat het als een *interdisciplinaire brug* functioneert: alle kennis die de voorbije decennia is opgebouwd over de achthoek van Keynes en Johnson binnen de filosofie, kan nu immers in één klap getransponeerd worden naar de kubus van Dubois en Prade binnen de artificiële intelligentie. Hierdoor hebben we een aantal openstaande onderzoeksvragen uit het werk van Dubois en Prade ondertussen eenduidig kunnen beantwoorden.



Figuur 6

Bijschrift: Aristotelische diagrammen uit kennisrepresentatie (links) en filosofie (rechts)

Een tweede cluster van toepassingen van Aristotelische diagrammen vinden we in een aantal hedendaagse filosofische debatten, zoals het debat rond Bertrand Russells theorie van bepaalde beschrijvingen, het religieus-epistemologische debat rond de precieze karakterisering van theïsme, atheïsme en agnosticisme, en het godsdienstfilosofische debat over toekomstige contingenties. Laten we even inzoomen op (de rol van Aristotelische diagrammen binnen) dit laatste debat. De twee voornaamste partijen in het hedendaagse debat over toekomstige contingenties zijn enerzijds het ‘open toekomst’-theïsme, met aanhangers zoals Gregory Boyd en Elijah Hess, en anderzijds het Molinisme, met aanhangers zoals William Lane Craig en Kirk MacGregor. Beschouw twee uitspraken over een toekomstige contingentie, zoals *het zal morgen regenen* en *het zal morgen niet regenen*. Volgens de Molinisten zijn deze twee uitspraken contradictorisch aan elkaar: zij kunnen niet samen waar zijn en zij kunnen niet samen onwaar zijn. Volgens de open toekomst-theïsten staan deze twee uitspraken echter niet in de Aristotelische relatie van contradictie, maar veeleer die van contrariteit: zij kunnen niet samen waar zijn, maar wél samen onwaar. Om deze argumentatie kracht bij te zetten, construeren de open toekomst-theïsten een oppositievierkant, met bovenaan een contrariteitsrelatie tussen de uitspraken *het zal morgen regenen* en *het zal morgen niet regenen*.

De claim dat deze twee uitspraken samen onwaar kunnen zijn (en dus contrair in plaats van contradictorisch zijn aan elkaar), vloeit voort uit het feit dat hun gezamenlijke onwaarheid overeenkomt met een consistent scenario, namelijk de zogenaamde openheid van de toekomst. Aangezien dit scenario dermate belangrijk is voor de open toekomst-theïsten (cf. de benaming van hun filosofische positie!), lijkt het vanzelfsprekend om het ook toe te voegen aan het oppositievierkant. Omwille van de reeds eerder genoemde aanname dat Aristotelische diagrammen gesloten zijn onder negatie, dienen we ook de negatie van dit scenario toe te voegen. Het Aristotelische diagram dat aldus bekomen wordt, is een oppositiezeshoek. Deze zeshoek voorziet expliciet een aparte plaats voor de openheid van de toekomst (veeleer dan haar impliciet te laten in de contrariteitsrelatie tussen twee andere uitspraken), en is daarom beter geschikt dan het oorspronkelijke vierkant als visualisatie van het open toekomst-theïsme. Bovendien kunnen we nu ook precies aanwijzen waar het verschilpunt ligt met het Molinisme. Het open toekomst-theïsme stelt dat de gezamenlijke onwaarheid van *het zal morgen regenen* en *het zal morgen niet regenen* een consistent scenario voorstelt, waardoor deze twee uitspraken contrair zijn aan elkaar. Het Molinisme stelt daarentegen dat de gezamenlijke onwaarheid van die twee uitspraken géén consistent scenario voorstelt, waardoor zij contradictorisch zijn aan elkaar. Dit betekent dat de oppositiezeshoek volgens het Molinisme 'dichtklapt' tot één enkel paar van contradictorische uitspraken (PCD). Dit PCD-diagram bevat geen enkele relatie van contrariteit (die impliciet zou kunnen wijzen op een vermeende openheid van de toekomst), en is daarom beter geschikt dan het oorspronkelijke vierkant als visualisatie van het Molinisme.

Een belangrijke opmerking hierbij is dat we zelf geen standpunt hoeven in te nemen binnen dit godsdienstfilosofische debat. De bijdrage van de logische meetkunde situeert zich op een strikt methodologisch niveau: we proberen de onderliggende argumentatieve structuur van het debat op te helderen, door het oorspronkelijke oppositievierkant uit te splitsen in twee afzonderlijke diagrammen, namelijk een oppositiezeshoek voor de open toekomst-theïsten en een PCD-diagram voor de Molinisten. Eén van de betrokken godsdienstfilosofen heeft ondertussen ook te kennen gegeven dat hij het eens is met dit voorstel, en dat hij vanaf nu gebruik zal maken van de twee afzonderlijke Aristotelische diagrammen in zijn onderzoek en onderwijs over het debat over toekomstige contingenties.

Voor een laatste toepassing van Aristotelische diagrammen staan we tot slot nog even stil bij het hedendaagse *logica-onderwijs*. In een typisch inleidend logicavak op universitair niveau ligt de nadruk op de zogenaamde objecttheorie van logica: de studenten leren waarheidstafels maken, afleidingen maken in natuurlijke deductie of een ander bewijssysteem, zinnen vertalen van natuurlijke taal naar de formele objecttaal, enzovoort. In een gevorderd vak, daarentegen, komt de nadruk veel sterker te liggen op de zogenaamde metatheorie van logica: er worden bewijzen gegeven van metatheoretische eigenschappen zoals correctheid, volledigheid, compactheid, (semi-)beslisbaarheid, enzovoort. Heel wat studenten ervaren deze overgang als erg bruusk: in het inleidende vak kregen zij de aangeboden materie en oefeningen vlot onder de knie en behaalden zij goede resultaten, maar in het gevorderde vak voelt alles plots vreemd aan en hebben zij geen enkele 'houvast' meer. Om deze situatie minstens gedeeltelijk te remediëren, kunnen we in gevorderde logicavakken gebruik maken van Aristotelische diagrammen. De studenten zijn immers reeds grondig vertrouwd met deze diagrammen vanuit hun inleidende vak, waardoor zij als een houvast kunnen fungeren in de nieuwe, onvertrouwde omgeving van de metatheorie.

Beschouw bijvoorbeeld de subalternatie van *alle Grieken zijn sterfelijk* naar *sommige Grieken zijn menselijk* in het oppositievierkant in Figuur 1. In het inleidende vak hebben de studenten aangeleerd dat dit categorische uitspraken zijn, met subject *Griek* en predikaat *sterfelijk*. Zij hebben geleerd dat deze uitspraken geformaliseerd kunnen worden in de objecttaal van de predikatenlogica, als respectievelijk $\forall x(Gx \rightarrow Sx)$ en $\exists x(Gx \wedge Sx)$. Bovendien hebben zij geleerd dat de tweede uitspraak volgt uit de eerste, tenminste als we aannemen dat er minstens één Griek bestaat. (Concreet betekent dit dat zij een derivatie kunnen opstellen in natuurlijke deductie waaruit blijkt dat $\forall x(Gx \rightarrow Sx), \exists xGx \vdash \exists x(Gx \wedge Sx)$.) Laten we nu echter overschakelen op een ander subject en predikaat: als subject nemen we *model van het logische systeem S* en als predikaat nemen we *maakt de formule φ waar*. De uitspraak *alle Grieken zijn sterfelijk* verandert hierdoor in *alle S-modellen maken φ waar*, wat precies de definitie is van de semantische notie van *S-tautologie* ($S \vDash \varphi$). De uitspraak *sommige Grieken zijn sterfelijk* verandert op haar beurt in *sommige S-modellen maken φ waar*, wat precies de definitie is van de semantische notie van *S-vervulbaarheid* ($S \nvDash \neg\varphi$). Vervolgens kunnen we aantonen dat alle tautologieën ook vervulbaar zijn (als $S \vDash \varphi$ dan $S \nvDash \neg\varphi$), tenminste als we aannemen dat S minstens één model heeft. Hierdoor hebben de studenten een (zeer basale) metatheoretische eigenschap aangetoond, zonder dat zij het gevoel hebben dat zij zich plots op volkomen vreemd terrein bevinden. Uit getuigenissen van studenten blijkt dat zij deze aanpak zeer weten te appreciëren.

Tot besluit

Aristotelische diagrammen zijn eeuwenoud maar ook springlevend. De systematische studie van deze diagrammen binnen de logische meetkunde heeft zich de voorbije jaren ontwikkeld tot een bloeiend onderzoeksprogramma, met een rijkgevulde onderzoeksagenda waar voortdurend nieuwe en interessante vragen aan toegevoegd worden. Aristotelische diagrammen vormen de rode draad doorheen al deze onderwerpen en vertakkingen, waardoor het onderzoeksprogramma ook zijn coherentie en eigenheid blijft behouden. Uit het theoretische luik blijkt dat Aristotelische diagrammen een rijke wiskundige structuur hebben, die ook om onafhankelijke redenen het bestuderen waard is. Uit het empirische luik blijkt dat deze diagrammen een enorme variëteit aan toepassingen hebben, van de godsdienstfilosofie, overheen de historiografie van de logica, tot en met de artificiële intelligentie.

Er liggen op dit moment reeds heel wat onderwerpen klaar die rijp zijn voor verder onderzoek, zowel wat betreft de theoretische grondslagen als de toepassingen van Aristotelische diagrammen. Eén van deze ontwikkelingen betreft de evolutie naar kwantitatief onderzoek op basis van een digitale databank van Aristotelische diagrammen. We hebben in deze bijdrage reeds gezien dat de theoretische resultaten uit de logische meetkunde vaak teruggekoppeld kunnen worden naar concrete toepassingen van Aristotelische diagrammen in de literatuur. Deze terugkoppeling neemt meestal de vorm aan van een gevalsstudie over een Aristotelische diagram van één individuele auteur, die vaak tot de 'canon der groten' van zijn/haar vakgebied behoort (bijvoorbeeld Johannes Buridanus en Nicole Oresme binnen de middeleeuwse filosofie of Didier Dubois en Henri Prade binnen de artificiële intelligentie). Doorheen deze bijdrage zijn we echter ook claims tegengekomen zoals 'de overgrote meerderheid van alle Aristotelische diagrammen in de literatuur is gesloten onder negatie' en 'in de periode ca. 1870 – 1930 werden er plots minder Aristotelische diagrammen geproduceerd'. Dergelijke claims hebben geen betrekking op deze of gene individuele auteur, maar betreffen brede evoluties of patronen in het gebruik van Aristotelische diagrammen (overheen verschillende tijdsvakken, overheen verschillende disciplines, enzovoort). Kleine, relatief onbekende auteurs spelen hierbij een even belangrijke rol als grote, gecanoniseerde auteurs. Om dergelijke claims kwantitatief te preciseren en verder te onderzoeken, zal de methode van individuele gevalsstudies niet langer volstaan.

Dit heeft geleid tot de ontwikkeling van Leonardi.DB (*Leuven Ontology for Aristotelian Diagrams – Database*). Deze databank, die online beschikbaar is voor de hele onderzoeksgemeenschap rond logische meetkunde, heeft als doel om zo veel mogelijk concrete Aristotelische diagrammen uit de literatuur te verzamelen. Er wordt hierbij geen enkel onderscheid gemaakt tussen 'grote' of 'kleine' auteurs, studieboeken of onderzoeksartikelen, middeleeuwse filosofen of hedendaagse computerwetenschappers, enzovoort. De databank is nog volop in opbouw, maar de teller staat momenteel (voorjaar 2021) reeds op meer dan 2000 Aristotelische diagrammen; een realistische schatting is dat de databank uiteindelijk rond de 7000 diagrammen zal bevatten. Deze exhaustieve aanpak zal ons in staat stellen om claims zoals 'de overgrote meerderheid van alle Aristotelische diagrammen in de literatuur is gesloten onder negatie' en 'in de periode ca. 1870 – 1930 werden er plots minder Aristotelische diagrammen geproduceerd' in veel meer detail te bestuderen. Hoe groot is die overgrote meerderheid nu precies? Vallen er patronen of trends te ontwaren binnen de diagrammen die níet gesloten zijn onder negatie? Is er inderdaad een (statistisch significante) daling in de productie van Aristotelische diagrammen rond de jaren 1870? En zo ja, wordt die daling dan volledig terug goedgemaakt door een overeenkomstige stijging rond de jaren 1930? Deze vragen illustreren het potentieel van Leonardi.DB om uit te groeien tot een belangrijk nieuw onderzoeksinstrument, dat bovendien perfect past binnen de vruchtbare wisselwerking tussen wiskundige theorievorming en empirische aftoetsing die kenmerkend is voor de logische meetkunde.

Dankwoord

Bedankt aan Hans Smessaert en Margaux Smets voor hun nuttige feedback bij een eerdere versie van deze tekst. Bedankt aan de overige leden van het BITSHARE-project (Jan Heylen, Walter Schaeken, Hans Smessaert, Joost Vennekens, Miguel Flament, Bojan Nys, Wai Wong, Ben Willebrords en Leander Vignero) en van het Leonardi.DB-team (Hans Smessaert, Wouter Termont en Sam Lauriers) voor de aangename en productieve samenwerking, waarvan een aantal resultaten reeds in deze bijdrage opgenomen zijn.

Literatuurlijst

1. V. Michele Abrusci, Claudia Casadio, M. Teresa Medaglia & Camillo Porcaro. 2013. Universal vs. particular reasoning: a study with neuroimaging techniques. *Logic Journal of the IGPL*, 21: 1017–1027.

2. Davide Ciucci, Didier Dubois & Henri Prade. 2016. Structures of opposition induced by relations. The Boolean and the gradual cases. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 76: 351–373.

3. Lorenz Demey. 2017. Using syllogistics to teach metalogic. *Metaphilosophy*, 48: 575–590.

4. Lorenz Demey. 2019a. Aristotelian diagrams in the debate on future contingents. A methodological reflection on Hess's open future square of opposition. *Sophia*, 58: 321–329.

5. Lorenz Demey. 2019b. Boolean considerations on John Buridan's octagons of oppositions. *History and Philosophy of Logic*, 40: 116–134.

6. Lorenz Demey. 2020a. Between square and hexagon in Oresme's *Livre du Ciel et du Monde*. *History and Philosophy of Logic*, 41: 36–47.

7. Lorenz Demey. 2020b. Mathematization and *Vergessenmachen* in the historiography of logic. *History of Humanities*, 5: 51–74.

8. Lorenz Demey & Hans Smessaert. 2018a. Combinatorial bitstring semantics for arbitrary logical fragments. *Journal of Philosophical Logic*, 47: 325–363.

9. Lorenz Demey & Hans Smessaert. 2018b. Geometric and cognitive differences between Aristotelian diagrams for the Boolean algebra $\mathbb{B}_4$. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 83: 185–208.

10. Elijah Hess. 2017. The open future square of opposition: A defense. *Sophia*, 56: 573–587.

11. Laurence R. Horn. 1989. *A Natural History of Negation*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

12. Dany Jaspers & Pieter Seuren. 2016. The square of opposition in Catholic hands: A chapter in the history of 20th-century logic. *Logique et Analyse*, 233: 1–35.

13. Gyula Klima, ed. 2001. John Buridan, *Summulae de Dialectica*. New Haven, CT: Yale University Press.

14. Jill Larkin & Herbert Simon. 1987. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11: 65–99.

15. David Londey & Carmen Johanson. 1984. Apuleius and the square of opposition. *Phronesis*, 29: 165–173.

16. Kirk MacGregor. 2016. The neo-Molinist square collapses. A Molinist response to Elijah Hess. *Philosophia Christi*, 18: 197–208.

17. Terrence Parsons. 2017. The traditional square of opposition. In Edward N. Zalta, ed., *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition). Stanford, CA: CSLI.

18. Hans Smessaert & Lorenz Demey. 2014. Logical geometries and information in the square of oppositions. *Journal of Logic, Language and Information*, 23: 527–565.

19. Ernest Sosa. 1964. The analysis of 'knowledge that P'. *Analysis* 25: 1 – 8.

20. Erich Vranes. 2006. The definition of 'norm conflict' in international law and legal theory. *European Journal of International Law*, 17: 395–418.